

## ENSEMBLES SIMPLICIAUX RÉGULIERS

MICHEL ZISMAN

(communicated by Lionel Schwartz)

### Résumé

On définit une sous-catégorie intéressante  $\mathcal{S}_{\text{reg}}$  de la catégorie des ensembles simpliciaux, dont les objets sont appelés *réguliers*. Cette catégorie, ainsi que sa sous-catégorie  $\mathcal{S}_{f\text{-reg}}$  dont les objets sont les ensembles simpliciaux réguliers et finis, ont de bonnes propriétés de stabilité par limite et union. La catégorie  $\mathcal{S}_{f\text{-reg}}$  est cartésienne fermée, en contraste de celle des ensembles simpliciaux finis qui n'est pas cartésienne fermée.

Le but de cette note est de répondre à une question d'André Joyal, qui m'a été posée par Georges Maltsiniotis. Désignons par  $\text{Hom}$  le Hom interne de la catégorie  $\mathcal{S}$  des ensembles simpliciaux, et soient  $U$  et  $X$  deux ensembles simpliciaux finis (i.e. qui n'ont qu'un nombre fini de simplexes non dégénérés) : dans ces conditions  $\text{Hom}(U, X)$  est-il fini ? Curieusement, la réponse est négative en général. Le premier contre-exemple, dû à Jacob Lurie<sup>1</sup>, consiste à prendre  $U = \Delta[1]$  et  $X = \Delta[3]/\hat{\Delta}[3]$ . Je n'ai pas réussi jusqu'à présent à caractériser les ensembles simpliciaux finis  $X$  pour lesquels la réponse est oui pour tous les ensembles simpliciaux finis  $U$ , mais la réponse est oui pour une large famille d'ensembles simpliciaux, que l'on appellera ensembles simpliciaux *réguliers* (confer 1.3.), en vertu du théorème suivant :

**Théorème 1.** Si  $X$  est un ensemble simplicial régulier de dimension finie, alors, pour tout ensemble simplicial fini  $U$ , l'ensemble simplicial  $\text{Hom}(U, X)$  est aussi de dimension finie.

(On dit qu'un ensemble simplicial est de *dimension finie* si le degré de ses simplexes non dégénérés est borné).

En particulier si  $X$  est régulier et fini, alors, pour tout ensemble simplicial fini  $U$ , l'ensemble simplicial  $\text{Hom}(U, X)$  est fini.

---

Je remercie Georges Maltsiniotis pour ses encouragements, le soin avec lequel il a relu de précédents états du manuscrit, et ses suggestions pour faciliter la lisibilité du texte. Je remercie aussi le referee dont les questions judicieuses m'ont permis de compléter utilement certains énoncés et de rendre plus agréable la lecture de quelques démonstrations.

Received September 10, 2008, revised June 15, 2009; published on September 21, 2009.

2000 Mathematics Subject Classification: 18G30.

Key words and phrases: Finite simplicial sets, cartesian closed categories, degeneracy operators.

© 2009, Michel Zisman. Permission to copy for private use granted.

1. au cours d'une conversation avec A. Joyal et G.Maltsiniotis

Nous verrons aussi que les sous-catégories pleines  $\mathcal{S}_{\text{reg}}$  de  $\mathcal{S}$  formées par ces ensemble simpliciaux et  $\mathcal{S}_{f\text{-reg}}$  formées par ceux qui sont en plus finis, possèdent de bonnes propriétés de stabilité.

## 1. Préliminaires.

**1.1.** Rappelons que les  $p$ -simplexes de  $\text{Hom}(U, X)$  sont les morphismes  $f : \Delta[p] \times U \rightarrow X$  de  $\mathcal{S}$ . Il en résulte immédiatement que l'on a

$$\text{Hom}(\text{colim}_{\alpha} U_{\alpha}, X) = \lim_{\alpha} \text{Hom}(U_{\alpha}, X).$$

Comme tout ensemble simplicial  $U$  est colimite d'une famille de  $\Delta[n]_x$  (indicée par les simplexes non dégénérés  $x$  de  $U$ ) on voit que pour démontrer que quel que soit  $U$  fini,  $\text{Hom}(U, X)$  est fini pour un certain  $X$ , il suffit de le vérifier pour les  $U = \Delta[n]$ , et on se limitera à ce cas dans toute la suite.

**1.2.** Voici quelques notations utiles dans la suite. Les objets de la catégorie simpliciale  $\Delta$  sont désignés comme d'habitude par des entiers entre crochets. Les morphismes faces et dégénérescences sont notés respectivement  $\partial_i$  et  $\sigma_i$ . Soient  $X$  un ensemble simplicial et  $\varphi : [p] \rightarrow [q]$  un morphisme de  $\Delta$ . On note  $X(\varphi) : X_q \rightarrow X_p$  l'application associée par la structure simpliciale de  $X$ . Soit  $\varphi(i, i+r) : [1] \rightarrow [p]$  le morphisme défini par  $0 \mapsto i$  et  $1 \mapsto i+r$ .

**1.3.** Introduisons maintenant quelques définitions.

On dit qu'un ensemble simplicial  $X$  est *fortement régulier* si pour tout simplexe  $x$  non dégénéré de  $X$ , les faces  $d_i x$  sont aussi non dégénérées.

Une *arête élémentaire* d'un  $n$ -simplexe  $x$  d'un ensemble simplicial  $X$  est un 1-simplexe  $y$  de  $X$  égal à  $X(\varphi(i, i+1))x$  pour un certain  $i$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ .

On dit qu'un ensemble simplicial vérifie la propriété  $P_r$  si, étant donné un simplexe  $x$  de  $X$  tel que  $X(\varphi(i, i+r))x$  soit dégénéré, alors il existe  $y \in X$  tel que  $x = s_{i+r-1} \dots s_i y$ .

On dit qu'un ensemble simplicial est *régulier* s'il vérifie la propriété  $P_1$ . Comme le laisse entendre la terminologie proposée, nous verrons qu'un ensemble simplicial fortement régulier est régulier.

## 1.4. Quelques propriétés élémentaires

**1.4.1.** On vérifie facilement le résultat suivant :

(\*) Soit  $x = s_{i+r-1} s_{i+r-2} \dots s_i y$  un simplexe de  $X$ . Alors l'arête  $X(\varphi(i, i+r))x$  est dégénérée.

On en déduit immédiatement le

**Lemme 1.** Soit  $y \in X$  un  $q$ -simplexe, soient  $\alpha : [p] \rightarrow [q]$  un morphisme surjectif, et  $x = X(\alpha)y$ . Alors  $X(\varphi(i, i+1))x$  est non dégénérée pour au plus  $q$  valeurs de  $i$ .

En effet  $X(\alpha) = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{p-q}}$  avec  $i_1 > i_2 > \cdots > i_{p-q}$ .

Lorsque  $X$  est fortement régulier, le résultat (\*) possède une réciproque :

**Lemme 2.** Un ensemble simplicial fortement régulier vérifie la propriété  $P_r$  pour tout  $r > 0$  (en particulier, il est régulier). Réciproquement si un ensemble simplicial satisfait aux conditions  $P_1$  et  $P_2$ , il est fortement régulier.

*Démonstration :* Pour la première partie, on procède par récurrence sur le degré  $p$  des simplexes, le cas  $p = 1$  étant tautologique. Soit  $x \in X_p$  un  $p$ -simplexe tel que  $X(\varphi(i, i + r))x$  soit dégénéré. Puisque  $X$  est fortement régulier,  $x$  est donc dégénéré, disons  $x = s_k y$  pour un certain  $k \leq p - 1$ . Il vient donc  $X(\varphi(i, i + r))x = X(\sigma_k \circ \varphi(i, i + r))y$ . Les relations de commutation

$$\sigma_k \circ \varphi(i, i + r) = \begin{cases} \varphi(i - 1, i + r - 1) & \text{si } k < i \\ \varphi(i, i + r - 1) & \text{si } i \leq k < i + r \\ \varphi(i, i + r) & \text{si } k \geq i + r \end{cases} .$$

permettent d'écrire suivant les cas

$$X(\varphi(i, i + r))x = \begin{cases} X(\varphi(i - 1, i + r - 1))y \\ X(\varphi(i, i + r - 1))y \\ X(\varphi(i, i + r))y \end{cases} .$$

Puisque cette arête est dégénérée, l'hypothèse de récurrence montre qu'il existe un  $z$  de degré  $p - 2$  tel que, selon les valeurs de  $k$ , on a

$$y = \begin{cases} s_{i+r-2} \cdots s_{i-1} z \\ s_{i+r-2} \cdots s_i z \\ s_{i+r-1} \cdots s_i z \end{cases} .$$

Mais alors il vient

$$x = s_k y = \begin{cases} s_{i+r-1} \cdots s_i s_k z \\ s_{i+r-1} \cdots s_i z \\ s_{i+r-1} \cdots s_i s_{k-r} z. \end{cases}$$

Supposons maintenant que  $X$  vérifie  $P_1$  et  $P_2$ . Soit  $x \in X$  et supposons que  $d_k x$  est dégénéré, disons  $d_k x = s_l y$ . Alors (confer (\*))  $X(\varphi(l, l + 1))d_k x$  est dégénéré. Or on a

$$X(\varphi(l, l + 1))d_k = X(\partial_k \circ \varphi(l, l + 1))$$

et on vérifie les égalités suivantes :

$$\partial_k \circ \varphi(l, l + 1) = \begin{cases} \varphi(l + 1, l + 2) & \text{si } k \leq l \\ \varphi(l, l + 2) & \text{si } k = l + 1 \\ \varphi(l, l + 1) & \text{si } k > l + 1. \end{cases}$$

L'hypothèse implique donc que, dans le premier cas, on a  $x = s_{l+1} z$ , dans le second on a  $x = s_{l+1} s_l z$  et dans le troisième  $x = s_l z$  pour un certain  $z$ . Dans tous les cas,  $x$  est dégénéré.

**Lemme 3.** Soit  $X$  un ensemble simplicial. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $X$  est régulier.
- (ii) Les arêtes élémentaires d'un simplexe non dégénéré de  $X$  sont toutes non dégénérées.
- (iii) Un simplexe  $x$  de  $X$  est non dégénéré si et seulement si toutes ses arêtes élémentaires sont non dégénérées.

*Démonstration :* (i)  $\Rightarrow$  (ii) par définition même de régulier. (iii) n'est autre que (ii) à laquelle on ajoute la propriété vraie sans restriction sur  $X$  à savoir qu'un dégénéré possède toujours une arête élémentaire dégénérée (confer (\*)). Reste à montrer (ii)  $\Rightarrow$  (i) et pour cela que si  $X$  ne satisfait pas à (i), il existe un simplexe non dégénéré de  $X$  dont une arête élémentaire est dégénérée. L'hypothèse dit qu'il existe un  $z \in X_p$  et un  $i$  tel que  $X(\varphi(i, i+1))z$  est dégénéré, mais qu'il n'existe aucun  $y$  tel que  $z = s_i y$ . Écrivons  $z = X(\phi)x$  avec  $x$  non dégénéré et  $\phi$  surjective :  $\phi(i)$  et  $\phi(i+1)$  sont donc soit égaux, soit deux entiers successifs. Le premier cas ne peut se présenter car il impliquerait l'existence d'un  $\psi$  tel que  $\phi = \psi \circ \sigma_i$ , et donc on aurait  $z = s_i X(\psi)x$  en contradiction avec l'hypothèse. Reste donc le second. Posons  $\phi(i) = j$ . Comme on a  $X(\varphi(i, i+1))z = X(\varphi(j, j+1))x$  et que  $x$  est non dégénéré, la démonstration est achevée.

La propriété (ii) du lemme précédent est très commode pour reconnaître un ensemble simplicial régulier. Par exemple, si  $n \geq 2$ , le quotient de  $\Delta[n]$  par son arête  $0n$ , qui n'est évidemment pas fortement régulier, est régulier. De même on démontre sans peine la proposition suivante :

**Proposition 1.** La catégorie  $\mathcal{S}_{\text{reg}}$  est stable par limites et sommes. Un sous-objet (dans  $\mathcal{S}$ ) d'un objet de  $\mathcal{S}_{\text{reg}}$  est dans  $\mathcal{S}_{\text{reg}}$ . Si  $X_a$  est une famille de sous-ensembles simpliciaux de  $X$ , et si chaque  $X_a$  est régulier, la réunion  $\bigcup X_a$  l'est aussi. Un nerf est toujours régulier.

(Pour montrer par exemple la stabilité de la catégorie  $\mathcal{S}_{\text{reg}}$  par produits, il suffit d'utiliser la définition ; pour montrer qu'un sous ensemble simplicial d'un ensemble simplicial régulier est régulier, on utilise la propriété (ii) et le fait qu'un simplexe d'un sous-ensemble simplicial est dégénéré si et seulement si il est dégénéré dans l'ensemble simplicial tout entier ; la stabilité par limites résulte de ces deux résultats.)

## 2. Un critère de dégénérescence.

**2.1.** Rappelons que les  $w$ -simplexes de  $\Delta[p] \times \Delta[n]$  sont les fonctions croissantes  $[w] \rightarrow [p] \times [n]$ . Si la deuxième coordonnée reste constante, on dira que le simplexe est *horizontal*, et si la première coordonnée reste constante, on dira qu'il est *vertical*.

Appelons *chemin a* du réseau  $[p] \times [n]$  un simplexe non dégénéré, de longueur maximale pour origine et extrémité fixées. Géométriquement, le chemin explicite les valeurs successives de  $a : [w] \rightarrow [p] \times [n]$ , deux valeurs successives ayant toujours

soit même abscisse soit même ordonnée. Notons  $\mathcal{C}$  l'ensemble des  $\binom{n+p}{p}$  chemins maximaux i.e. ceux qui relient  $(0, 0)$  à  $(p, n)$ , et faisons la remarque, triviale mais utile, que si  $c$  est un chemin maximal passant par le point de coordonnées  $(i, j)$ , alors on a  $c(i + j) = (i, j)$ .

Pour se donner un  $p$ -simplexe  $f$  de  $Hom(\Delta[n], X)$ , donc un morphisme  $f : \Delta[p] \times \Delta[n] \rightarrow X$ , il suffit de se donner les  $(p + n)$ -simplexes  $z_a = f(a)$  de  $X$  lorsque  $a$  parcourt  $\mathcal{C}$ , ces données étant soumises aux relations naturelles qui expriment que “sur l'intersection  $a \cap b$  de deux chemins maximaux,  $z_a$  et  $z_b$  coïncident”<sup>2</sup>. On se propose dans ce paragraphe de donner un critère qui exprime que  $f$  est en fait un dégénéré d'un  $(p - 1)$ -simplexe  $g$ . Commençons par le diagramme commutatif suivant.

**2.2.** Étant donné un chemin maximal  $a$  de  $[p] \times [n]$  et un entier positif ou nul  $k < p$ , il existe un unique entier  $t$  tel que l'on a

$$\begin{aligned} a(k + t) &= (k, t) \\ a(k + t + 1) &= (k + 1, t) \end{aligned}$$

Ayant ainsi fixé  $t$ , on définit un chemin maximal  $m$  de  $[p - 1] \times [n]$  en posant

$$m(j) = \begin{cases} a(j) & \text{si } j \leq k + t \\ a(j + 1) - (1, 0) & \text{si } j \geq k + t \end{cases}$$

et on vérifie sans peine que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} [p + n] & \xrightarrow{a} & [p] \times [n] \\ \sigma_{k+t} \downarrow & & \downarrow \sigma_k \times \text{id} \\ [p + n - 1] & \xrightarrow{m} & [p - 1] \times [n] \end{array}$$

commute. Mais alors si  $g : \Delta[p - 1] \times \Delta[n] \rightarrow X$  est un  $(p - 1)$ -simplexe de  $Hom(\Delta[n], X)$  et si  $h$  désigne le  $p$ -simplexe dégénéré  $s_k g$ , il vient :

$$h(a) = s_{k+t} g(m).$$

D'après l'assertion (\*) de 1.4.1., l'image par  $h$  de l'arête  $((k, t), (k + 1, t))$  est dégénérée. Introduisons, pour désigner ce phénomène, les définitions suivantes :

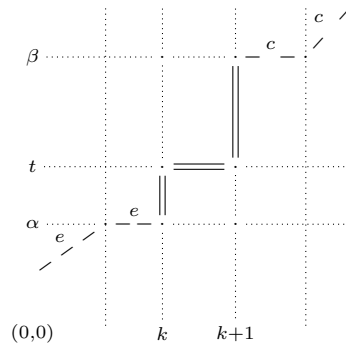
Soit  $k$  un entier,  $0 \leq k \leq p - 1$ . On dit qu'un  $p$ -simplexe  $f$  de  $Hom(\Delta[n], X)$  est  $k$ -presque dégénéré si pour tout  $0 \leq j \leq n$ , le 1-simplexe de  $X$  égal au composé  $[1] \longrightarrow [p] \times [n] \xrightarrow{f} X$  (où la première flèche est défini par  $0 \mapsto (k, j)$ ,  $1 \mapsto (k + 1, j)$ ) est dégénéré. On dira qu'il est presque-dégénéré s'il existe un  $k$  tel qu'il est  $k$ -presque dégénéré.

---

2. Confer par exemple P. Gabriel and M. Zisman *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Mathematik, Band 35, Chapter II, 5.5.

Nous avons donc constaté qu'un  $p$ -simplexe dégénéré de  $Hom(\Delta[n], X)$  est presque dégénéré. Nous verrons que moyennant des conditions sur  $X$ , cet énoncé possède une réciproque.

**2.2.1.** Nous allons dans ce but préciser la forme des chemins maximaux dans la tranche verticale limitée par les points d'abscisse  $k$  et  $k + 1$ . Pour tout triplet  $\alpha, t, \beta$  d'entiers avec  $0 \leq \alpha \leq t \leq \beta \leq n$ , soit  $b_{\alpha t \beta}$  l'unique chemin du réseau  $[p] \times [n]$  passant par les points  $(k, \alpha), (k, t), (k + 1, t)$  et  $(k + 1, \beta)$  et soit  $l_{\alpha \beta}$  l'unique chemin du réseau  $[p - 1] \times [n]$  passant par les points  $(k, \alpha)$  et  $(k, \beta)$ . Si  $k = 0$ , on prend  $\alpha = 0$ , si  $k = p - 1$ , on prend  $\beta = n$ .



en pointillé : le réseau  $[p] \times [n]$ , en trait double :  $b_{\alpha t \beta}$ , en tirets :  $e$  et  $c$ .

On introduit aussi les ensembles de chemins  $E_\alpha$  qui joignent les points  $(0,0)$  à  $(k, \alpha)$  et qui arrivent horizontalement en  $(k, \alpha)$  (i.e. qui passent par  $(k - 1, \alpha)$ ; ensemble vide si  $k = 0$ ), et  $C_\beta$  qui joignent  $(k + 1, \beta)$  à  $(p, n)$  et qui partent horizontalement de  $(k + 1, \beta)$  (i.e. qui passent par  $(k + 2, \beta)$ ; ensemble vide si  $k = p - 1$ ). Enfin à  $c \in C_\beta$ , on associe le chemin  $c^-$  de  $[p - 1] \times [n]$ , défini par  $c^-(i) = c(i) - (1, 0)$ .

Ces notations étant fixées, il est clair que tout chemin maximal  $a \in \mathcal{C}$  s'écrit d'une et d'une seule manière comme une somme  $a = e + b_{\alpha t \beta} + c$ , avec  $e \in E_\alpha$  et  $c \in C_\beta$ , l'addition  $+$  désignant la concaténation :  $a(i) = e(i)$  pour  $i \leq k + \alpha$ ,  $a(i) = b_{\alpha t \beta}(i - k - \alpha)$  pour  $k + \alpha \leq i \leq k + 1 + \beta$  et  $a(i) = c(i - k - 1 - \beta)$  pour  $k + 1 + \beta \leq i$ . Par ailleurs, la relation de 2.2. s'écrit maintenant

$$h(e + b_{\alpha t \beta} + c) = s_{k+t}g(e + l_{\alpha \beta} + c^-)$$

pour  $h = s_k g$ .

**2.2.2. Le lemme principal.**

**Lemme 4.** Soient  $X$  un ensemble simplicial régulier, et  $f$  un simplexe  $k$ -presque dégénéré de  $Hom(\Delta[n], X)$ . Alors il existe un simplexe  $g$  tel que  $f = s_k g$ . Les simplexes presque dégénérés de  $Hom(\Delta[n], X)$  sont donc dégénérés.

*Démonstration :* Soit  $f$  un  $p$ -simplexe de  $Hom(\Delta[n], X)$  presque dégénéré. Il existe donc un entier  $k$ ,  $0 \leq k \leq p - 1$ , tel que pour tout  $0 \leq j \leq n$ , le 1-simplexe de  $X$  égal au composé  $\Delta[1] \longrightarrow \Delta[p] \times \Delta[n] \xrightarrow{f} X$  (où la première flèche est

définie par  $0 \mapsto (k, j), 1 \mapsto (k + 1, j)$ ) est dégénéré. Soit  $a$  un chemin maximal que l'on écrit  $a = e + b_{\alpha t \beta} + c$ . L'arête  $X(\varphi(k + t, k + t + 1))f(a)$  est donc dégénérée. Puisque  $X$  est régulier, cela signifie que l'on a

$$f(a) = s_{k+t}y_t$$

pour un certain  $y_t \in X$ . Si  $\alpha < t \leq \beta$ , choisissons maintenant  $a' = e + b_{\alpha(t-1)\beta} + c$ . Il vient de même  $f(a') = s_{k+t-1}y_{t-1}$ . Comme  $a$  et  $a'$  ne diffèrent que sur le carré formé par les deux verticales du réseau, d'abscisse  $k$  et  $k + 1$  d'une part et les deux horizontales d'ordonnée  $t - 1$  et  $t$  d'autre part, les relations de compatibilité indiquent que l'on a  $d_{k+t}f(a) = d_{k+1+t-1}f(a')$  ce qui impose

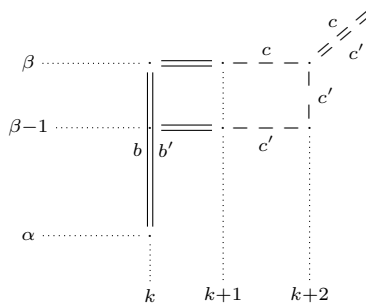
$$y_t = y_{t-1}.$$

Les  $y_t$  sont donc indépendants de  $t$ , et tous égaux à  $d_{k+\beta+1}f(e + b_{\alpha\beta\beta} + c)$ , ne dépendant que de  $e, c, \alpha, \beta$ . On les notera  $g(e + l_{\alpha\beta} + c^-)$ . Remarquons que si on a  $\alpha = \beta$ , alors le chemin  $b_{\alpha\beta\beta}$  est réduit à une arête et le chemin  $l_{\alpha\beta}$  à un point.

Ainsi, à tout chemin maximal  $e + l_{\alpha\beta} + c^-$  du réseau  $[p-1] \times [n]$ , nous avons associé le  $(p+n-1)$ -simplexe  $g(e + l_{\alpha\beta} + c^-)$  de  $X$ . Par construction, on a  $f(e + b_{\alpha t \beta} + c) = s_{k+t}g(e + l_{\alpha\beta} + c^-)$  et il reste à vérifier que les relations de compatibilité sont satisfaites par les  $g(e + l_{\alpha\beta} + c^-)$ . Soient  $m$  et  $m'$  deux chemins maximaux du réseau  $[p-1] \times [n]$  qui ne diffèrent que sur le carré passant par les deux points  $(i, j)$  et  $(i + 1, j + 1)$ . On doit avoir  $d_{i+j+1}g(m) = d_{i+j+1}g(m')$ . Il y a quatre cas, selon que  $i < k - 1, i = k - 1, i = k$  et  $i > k$ . Les deux cas extrêmes sont évidents. Traitons par exemple le cas  $i = k$ . On a  $m = e + l_{\alpha\beta} + c^-$  et  $m' = e + l_{\alpha(\beta-1)} + c'^-$ , avec  $c'(0) = (k + 1, \beta - 1), c'(1) = (k + 2, \beta - 1)$  et  $c'(r + 1) = c(r)$  pour  $r > 1$ . Nous devons vérifier l'égalité

$$d_{k+\beta}d_{k+\beta+1}f(e + b_{\alpha\beta\beta} + c) = d_{k+\beta}d_{k+\beta}f(e + b_{\alpha(\beta-1)(\beta-1)} + c')$$

ce qui ne pose aucune difficulté : c'est exactement la compatibilité des deux  $(p+n)$ -simplexes qui figurent de part et d'autre de l'égalité.



on a écrit  $b$  au lieu de  $b_{\alpha\beta\beta}$  et  $b'$  au lieu de  $b_{\alpha(\beta-1)(\beta-1)}$ .

### 3. Les théorèmes.

3.1. La proposition suivante est un cas particulier du théorème 1 :

**Proposition 2.** Si  $X$  est un ensemble simplicial régulier de dimension  $q$ , alors  $Hom(\Delta[n], X)$  est de dimension au plus  $(n + 1)q$ .

*Démonstration :* Soit  $f$  un  $p$ -simplexe de  $Hom(\Delta[n], X)$ , i.e. un morphisme  $\Delta[p] \times \Delta[n] \rightarrow X$ . Pour tout  $0 \leq j \leq n$ , soit  $x_j : [p] \rightarrow [p] \times [n]$  le  $p$ -simplexe de  $\Delta[p] \times \Delta[n]$  défini par  $i \mapsto (i, j)$ . Son image par  $f$  est un  $p$ -simplexe de  $X$ . On dira que l'arête  $((i, j), (i+1, j))$  du réseau  $[p] \times [n]$  est *efficace* si l'arête élémentaire  $X(\varphi(i, i+1))f(x_j)$  est non dégénérée. Supposons maintenant que  $X$  est de dimension finie  $q$ , et prenons  $p > q$  : sous ces conditions le simplexe  $f(x_j)$  est dégénéré; le lemme 1 nous dit que ce simplexe possède au plus  $q$  arêtes efficaces. Comme  $j$  prend  $n + 1$  valeurs distinctes, le réseau possède au plus  $(n + 1)q$  arêtes efficaces distinctes. Choisissons donc  $p > (n + 1)q$ , ce qui nous assure de l'existence d'un entier  $k$  tel que, pour tout  $j = 0, \dots, n$ , l'arête  $((k, j), (k+1, j))$  est non efficace. En d'autres termes, le simplexe  $f$  est presque dégénéré. D'après le lemme 4, il est donc dégénéré.

**3.1.1.** La borne  $(n + 1)q$  est la meilleure possible puisque  $Hom(\Delta[n], \Delta[q])$  est de dimension  $(n + 1)q$ . En effet les  $p$ -simplexes de  $Hom(\Delta[n], \Delta[q])$  sont les applications croissantes  $f : [p] \times [n] \rightarrow [q]$  et ce simplexe est dégénéré si et seulement si  $f$  prend les mêmes valeurs sur deux colonnes voisines du réseau  $[p] \times [n]$ . Soit alors  $f : [(n + 1)q] \times [n] \rightarrow [q]$  l'application définie par les égalités suivantes, où  $j$  parcourt les valeurs  $0 \leq j \leq n$ , et où l'on a écrit  $i = kq + a$  pour  $i > 0$ ,  $k \in \{0, \dots, n\}$  et  $1 \leq a \leq q$  : on pose  $f(0, j) = 0$  et, pour  $i > 0$ ,

$$f(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < n - k \\ a & \text{si } j = n - k \\ q & \text{si } j > n - k. \end{cases}$$

On définit ainsi un  $(n + 1)q$ -simplexe non dégénéré de  $Hom(\Delta[n], \Delta[q])$  qui est donc de dimension au moins  $q$ . Montrons que la dimension est exactement  $(n + 1)q$ . Soit  $f$  un simplexe non dégénéré de degré  $p$ . Pour tout  $i \in [p]$ , il existe au moins un  $j \in [n]$  tel que  $f(i, j) < f(i + 1, j)$ . Donc, si  $\sigma(i)$  désigne la somme  $f(i, 0) + f(i, 1) + \dots + f(i, n)$  des valeurs prises par la fonction sur la  $i$ -ème colonne du réseau, il vient  $\sigma(i) < \sigma(i + 1)$  et finalement  $\sigma(p) \geq p$ . Mais par ailleurs il est clair que l'on a, pour tout  $i$ ,  $\sigma(i) \leq (n + 1)q$ , puisqu'il y a  $n + 1$  termes dans chaque colonne du réseau. Donc il vient  $p \leq \sigma(p) \leq (n + 1)q$ .

**3.1.2. Démonstration du théorème 1.** On écrit  $U = \text{colim}_u \Delta[|u|]_x$  où  $u$  parcourt l'ensemble des simplexes non dégénérés de  $U$ , et où  $|u|$  désigne le degré de  $u$ . L'égalité donnée dans (1.1) et la proposition 2, ainsi que les propriétés élémentaires de la dimension permettent de conclure. Plus précisément, soient  $A$  et  $B$  deux ensembles simpliciaux de dimension finie. On a  $\dim(A \times B) = \dim A + \dim B$ , et si  $A \subset B$  alors il vient  $\dim A < \dim B$ . Comme une limite finie n'est autre qu'un sous objet d'un produit fini, nous obtenons :

**Théorème 1bis.** Soient  $X$  un ensemble simplicial de dimension finie et  $U$  un ensemble simplicial fini. On a :

$$\dim Hom(U, X) \leq \sum_u (|u| + 1) \cdot \dim X$$



où, dans la somme,  $u$  parcourt l'ensemble des simplexes non dégénérés de  $U$ .

**3.2.** Partant d'un ensemble simplicial régulier  $X$  qu'en est-il de  $Hom(U, X)$ ? Le théorème 2 répond à la question :

**Théorème 2.** Soient  $X$  un ensemble simplicial régulier et  $U$  un ensemble simplicial quelconque. Alors  $Hom(U, X)$  est régulier.

*Démonstration :* Utilisant la remarque 1.1. et la proposition 1, nous voyons qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas où  $U = \Delta[n]$ . Posons  $Y = Hom(\Delta[n], X)$ . Soit  $f \in Y_p$ , et supposons que  $Y(\varphi(k, k+1))f$  est dégénéré. Cela signifie qu'il existe un  $h$  qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta[1] \times \Delta[n] & \xrightarrow{\varphi(k, k+1) \times id} & \Delta[p] \times \Delta[n] \xrightarrow{f} X \\
 \searrow \sigma_0 & & \nearrow h \\
 & \Delta[n] &
 \end{array}$$

Mais alors pour tout  $j \in \{0, \dots, n\}$ , les 1-simplexes  $((k, j), (k+1, j))$  ne sont pas efficaces. Comme dans la démonstration du théorème 1, cela signifie que  $f$  est  $k$ -presque dégénéré. Le lemme 4 implique qu'il existe  $g$  tel que  $f = s_k g$ . Donc  $Y$  vérifie  $P_1$ .

Lorsque l'on se restreint aux ensembles simpliciaux finis, on obtient (confer proposition 1) :

**Théorème 3.** La catégorie  $\mathcal{S}_{f\text{-reg}}$  est stable par limites finies et cartésienne fermée. Elle est aussi stable par sous-objets et sommes finies (et même réunions finies).

**4. Quelques compléments.** Disons qu'un ensemble simplicial  $X$  est fortement fini si  $Hom(U, X)$  est fini pour tout ensemble simplicial fini  $U$ .

On peut montrer que tous les quotients de  $\Delta[2]$  sont fortement finis. Il est probable qu'on peut en déduire que les ensembles simpliciaux finis de dimension 2 sont fortement finis.

Notons  $F_i$  la  $i$ -ème face de  $\Delta[q]$ . Voici un résultat qui généralise légèrement celui de Lurie annoncé au début :

**Proposition 3.** Soit  $F \subset \dot{\Delta}[q]$  ( $q \geq 3$ ) une réunion de faces qui contient  $F_a \cup F_{a+1}$  pour un certain  $a$ ,  $0 < a < q - 1$ . Alors  $X = \Delta[q]/F$  n'est pas fortement fini.

*Démonstration (Lurie) :* Introduisons la fonction coupe définie sur  $\mathbb{Z}$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$  par

$$\text{coupe}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq 0 \\ i & \text{si } 0 \leq i \leq q \\ q & \text{si } q \leq i \end{cases} .$$

Soit  $p > q$  un entier, soit  $0 \leq u \leq p$  et soit  $z_u$  le  $(p+1)$ -simplexe de  $\Delta[q]$ , i.e. le morphisme  $[p+1] \rightarrow [q]$  de la catégorie  $\Delta$ , défini par  $z_u(i) = \text{coupe}(i - u + a)$ . Il est clair que  $z_u \circ \partial_u$  ne prend pas la valeur  $a$  et que  $z_u \circ \partial_{u+1}$  ne prend pas la valeur  $a+1$ . Ainsi  $d_u z_u$  et  $d_{u+1} z_u$  sont des simplexes de  $F$ . Les  $p+1$  simplexes  $\bar{z}_u$ , images des précédents dans le quotient  $X$  vérifient donc les relations de compatibilité  $d_{u+1} \bar{z}_u = d_u \bar{z}_{u+1}$  et définissent ainsi un  $p$ -simplexe de  $\text{Hom}(\Delta[1], X)$ . Ce simplexe n'est jamais dégénéré. En effet (d'après 2.2., ou un raisonnement direct), la condition pour qu'un  $p$ -simplexe  $f$  de  $\text{Hom}(\Delta[1], Z)$ , donné par  $p+1$  simplexes  $f_u$ ,  $u \in \{0, \dots, p\}$ , de degré  $p+1$  de  $Z$ , soit le dégénéré  $s_k g$  d'un simplexe  $g$  donné par des  $g_v \in Z_p$ , est

$$f_u = s_{k+1} g_u \quad \text{si } u \leq k \quad \text{et} \quad f_u = s_k g_{u-1} \quad \text{si } u > k.$$

Il suffit de montrer que  $\bar{z}_k$  n'est pas dans l'image de  $s_{k+1}$  pour vérifier l'assertion. Or on a  $z_u(u+1) = a+1$  et  $z_u(u+2) = a+2$ . Si on avait  $\bar{z}_k = s_{k+1} \bar{y}$  pour un certain  $y$ , alors  $z_k = y \circ \sigma_{k+1}$  prendrait la même valeur pour  $k+1$  et  $k+2$ , ce qui est impossible. Mais alors  $\text{Hom}(\Delta[1], X)$  est de dimension infinie.

**Remarque.** Qu'en est-il de  $\Delta[q]/F_i$ ? La question reste ouverte. Je ne sais pas non plus si l'on peut remplacer dans le théorème 2, régulier par fortement régulier. C'est vrai pour  $X = \Delta[q]$ , d'après un raisonnement analogue à celui de (3.1.1.) utilisant la croissance de  $\sigma$ .

<http://www.emis.de/ZMATH/>

<http://www.ams.org/mathscinet>

This article may be accessed via WWW at <http://www.rmi.acnet.ge/jhrs/>

Michel Zisman  
[zisman@math.jussieu.fr](mailto:zisman@math.jussieu.fr)

Université Paris 7  
 Paris, France